

## **МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВОЛНОВОЙ ФОКУСИРОВКИ ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИМ ЗЕРКАЛОМ**

**А. В. Боровский<sup>1</sup>, А. Л. Галкин<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> *Байкальский государственный университет, г. Иркутск, Российская Федерация*

<sup>2</sup> *Институт общей физики им. А. М. Прохорова Российской академии наук, г. Москва, Российская Федерация*

### **Информация о статье**

Дата поступления  
25 апреля 2016 г.

Дата принятия к печати  
19 мая 2016 г.

Дата онлайн-размещения  
2 августа 2016 г.

### **Ключевые слова**

Параболическое зеркало;  
обобщенный интеграл  
Кирхгофа; фокусировка  
лазерного излучения

### **Аннотация**

В статье рассмотрена волновая фокусировка лазерного излучения осесимметричным параболическим зеркалом. На зеркало параллельно его оси падает лазерный пучок, имеющий гауссовское поперечное распределение интенсивности. Для вычисления векторного потенциала электромагнитного поля вблизи фокуса применяется обобщенный интеграл Кирхгофа, который является интегральным представлением решения краевой задачи для волнового уравнения. Проведено численное моделирование волновой фокусировки аксиально симметричным параболическим зеркалом. Показано, что если волновой фронт падающей волны плоский, чему соответствует коллимированный гауссовский пучок, то в фокальной плоскости параболического зеркала и вблизи нее в парааксиальном приближении векторный потенциал и электрическое поле имеют гауссовское поперечное распределение интенсивности. Для широкоапертурных систем в распределении поля центральный максимум уменьшается и появляются периферийные кольца.

## **MATHEMATICAL MODEL OF THE LASER RADIATION WAVE FOCUSING BY A PARABOLIC MIRROR**

**Andrei V. Borovskiy<sup>1</sup>, Andrei L. Galkin<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> *Baikal State University, Irkutsk, Russian Federation*

<sup>2</sup> *Prokhorov General Physics Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

### **Article info**

Received  
April 25, 2016

Accepted  
May 19, 2016

Available online  
August 2, 2016

### **Keywords**

Parabolic mirror; generalized  
Kirchhoff integral; laser  
radiation focusing

### **Abstract**

This paper considers the laser radiation wave focusing by the axisymmetric parabolic mirror. A laser beam with a Gaussian lateral intensity distribution falls on a mirror in parallel to its axis. To find a vector potential of the electro-magnetic field in the neighborhood of the focus, we apply a generalized Kirchhoff integral, which is an integral form of the solution to the boundary problem for the wave equation. We performed numerical simulation of the wave focusing by the axially symmetric parabolic mirror. It has been shown that if the incident wave-front is plane, which corresponds to the collimated Gaussian beam, then in the focal plane of the parabolic mirror and within its neighborhood in paraxial approximation the vector potential and electric field have the Gaussian transverse intensity distribution. For the large aperture systems, the central maximum in the field distribution decreases and peripheral rings appear.

В различных применениях астрономии [1–2], физики антенн [3–8], оптических устройств [9; 10], лазерной техники [11; 12] используются параболические зеркала<sup>1</sup>, обладающие уни-

кальным свойством собирать параллельные лучи в одну точку — геометрический фокус.

В последние годы в фемтосекундной лазерной физике для формирования высоких интенсивностей излучения в качестве фокусирующей системы также применялось параболическое зеркало [12]. Такая конструк-

<sup>1</sup> Tydex. Внеосевые параболические зеркала. URL : [http://www.tydexoptics.com/ru/products/spectroscopy/oap\\_mirrors](http://www.tydexoptics.com/ru/products/spectroscopy/oap_mirrors).

ция фокусирующей системы привлекает исследователей дешевой изготовления, так как для зеркала требуется обработать одну поверхность, а для линзы — две. Параболическое зеркало при падении на него плоской волны формирует сферический волновой фронт для отраженной волны, что позволяет осуществить практически идеальную фокусировку. Недостатком параболического зеркала является необходимость осуществления косоугольной фокусировки под некоторым углом к оптической оси, чтобы развести в пространстве падающую и облучаемую объект волны, что должно ухудшать характеристики сфокусированного излучения в фокальной области. Теория параболического зеркала сложнее теории линзы [13–15].

Для определения картины и характеристик излучения в фокальной области требуется привлечь методы волновой оптики. Наиболее адекватным методом расчета полей в фокусе является применение обобщенного интеграла Кирхгофа [16, с. 348], поскольку он считается интегральным представлением нестационарного (в отличие от уравнения Гельмгольца) волнового уравнения.

Далее рассмотрим теорию волновой фокусировки лазерного излучения параболическим зеркалом с применением обобщенного интеграла Кирхгофа. Данная статья посвящена нормальному падению плоской волны на осесимметричное параболическое зеркало.

### ПЛАНИМЕТРИЯ ПАРАБОЛЫ

В планиметрии парабола — это геометрическое место точек, для которого суммарное расстояние до прямой и фокуса постоянно (рис. 1), что допускает применение принципа Ферма к определению траектории распространения лучей

$$AB + BF = R.$$

Математическая запись этого соотношения дает выражение

$$\frac{R}{2} - z_s + \sqrt{\left(\frac{R}{2} - z_s\right)^2 + r_s^2} = R,$$

откуда

$$z_s = \frac{1}{2R} r_s^2. \quad (1)$$

Точка  $B$  с координатами  $\{r_s, z_s\}$  лежит на параболе (см. рис. 1). Уравнение (1) является уравнением параболы.

Вычислим в точке  $z_s$  производную

$$r_s = \sqrt{2Rz_s};$$

$$\frac{\partial r_s}{\partial z_s} = \sqrt{\frac{R}{2z_s}}.$$

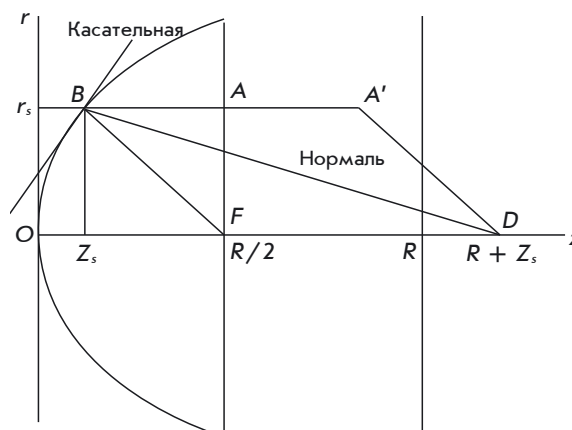


Рис. 1. Планиметрия параболы

Уравнение касательной

$$r - \sqrt{\frac{R}{2z_s}} z = \alpha,$$

где  $\alpha$  — константа, значение которой для нас не важно.

Единичный вектор нормали к касательной

$$\mathbf{n} = (n_r, n_z) = \left( -\sqrt{1 / \left(1 + \frac{R}{2z_s}\right)}, \sqrt{\frac{R}{2z_s}} / \left(1 + \frac{R}{2z_s}\right) \right).$$

Найдем точку пересечения нормали с осью  $Oz$ . Для этого запишем векторное уравнение прямой, являющейся нормалью к поверхности параболы:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_s + \mathbf{n} \delta,$$

где  $\delta$  — числовая переменная.

Перепишем векторное уравнение в виде двух координатных уравнений

$$r = r_s + n_r \delta,$$

$$z = z_s + n_z \delta.$$

Точка пересечения с осью  $Oz$  находится из условия  $r = 0$ , откуда

$$\delta = -\frac{1}{n_r} \sqrt{2Rz_s}.$$

Подставив в уравнение для  $z$ , найдем

$$z = R + z_s.$$

Покажем, что луч  $AB$ , отразившись от параболы по закону геометрической оптики, попадет в точку  $F (R/2)$ . В самом деле, треугольник  $\triangle DBF$  равнобедренный из равенства углов  $\angle DBF = \angle FDB$ . Углы  $\angle ABD$  и  $\angle DBF$  равны как углы падения и отражения луча от поверхности параболы. Углы  $\angle ABD$  и  $\angle FDB$  равны как углы между двумя параллельными прямыми и секущей прямой. Если точка  $F$  не попадает в  $R/2$ , то нарушается условие  $AB + BF = R$ , что невозможно. Таким образом, параболоид собирает все лучи, параллельные оси  $Oz$ , в точку  $F(R/2)$ .

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТРЕХМЕРНОЙ НОРМАЛИ К ПАРАБОЛОИДУ

Провернув параболу (см. рис. 1) вокруг оси  $Oz$  на  $360^\circ$ , получим пространственный трехмерный параболоид. Введем трехмерную систему координат  $Oxyz$ . Ось  $Oz$  этой системы координат показана на рис. 1. Плоскость  $Oxy$  перпендикулярна оси  $Oz$  и касательна вершины параболоида. В плоскости  $Oxy$  введем полярную систему координат

$$x = r \cos \mu, \quad y = r \sin \mu, \quad (2)$$

где  $\mu$  — полярный угол.

Нормаль к поверхности параболоида в трехмерном пространстве определяется по двум точкам  $(x_s, y_s, z_s)$  на параболоиде и  $(0, 0, R + z_s)$  на оси  $Oz$ . Нормаль направлена вдоль указанного отрезка, длина которого

$$d = \sqrt{x_s^2 + y_s^2 + R^2} = \sqrt{r_s^2 + R^2}.$$

Нас интересует внутренняя нормаль к поверхности параболоида, которая фигурирует в интеграле Кирхгофа. Компоненты нормали равны косинусам углов, которые нормаль составляет с осями системы координат

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \left( -\frac{x_s}{\sqrt{r_s^2 + R^2}}, -\frac{y_s}{\sqrt{r_s^2 + R^2}}, \frac{R}{\sqrt{r_s^2 + R^2}} \right) = \\ &= \left( -\frac{r_s \cos \mu}{\sqrt{r_s^2 + R^2}}, -\frac{r_s \sin \mu}{\sqrt{r_s^2 + R^2}}, \frac{R}{\sqrt{r_s^2 + R^2}} \right). \end{aligned}$$

### ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНЫХ

Квадрат расстояния между точкой на параболоиде и точкой вблизи фокуса определяется по формуле

$$s = |r_s - r|; \quad (3)$$

$$s^2 = (x_s - x)^2 + (y_s - y)^2 + (z_s - z)^2.$$

Интеграл Кирхгофа содержит производные  $\partial s / \partial n$  и  $\partial s^{-1} / \partial n$ . Вычислим их следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial n} &= (\mathbf{n} \cdot \nabla_s s) = -\frac{x_s}{\sqrt{r_s^2 + R^2}} \frac{(x_s - x)}{s} - \\ &- \frac{y_s}{\sqrt{r_s^2 + R^2}} \frac{(y_s - y)}{s} + \frac{R}{\sqrt{r_s^2 + R^2}} \frac{(z_s - z)}{s}. \end{aligned}$$

В плоскости наблюдения, перпендикулярной оси  $Oz$ , положим (задача аксиально симметричная)

$$y = 0, \quad x = r, \quad z = \frac{R}{2} + \Delta z,$$

где  $\Delta z$  — смещение вдоль оси  $z$  плоскости наблюдения относительно точки  $F(R/2)$ .

Получим в результате

$$\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial n} &= \frac{1}{s \sqrt{r_s^2 + R^2}} \times \\ &\times \left\{ -\frac{1}{2} r_s^2 + r_s r \cos \mu - \frac{R^2}{2} - R \Delta z \right\}. \end{aligned} \quad (4)$$

В параксиальном приближении

$$R \gg r_s, r, \Delta z;$$

$$\frac{\partial s}{\partial n} = -\frac{R}{2s}.$$

Расстояние до точки наблюдения определяется следующим образом:

$$s^2 = r_s^2 + r^2 - 2r_s r \cos \mu + \left( \frac{R}{2} + \Delta z - z_s \right)^2.$$

Вычислим производную  $\partial s^{-1} / \partial n$  по формуле

$$\begin{aligned} \frac{\partial s^{-1}}{\partial n} &= -\frac{1}{s^2} \frac{\partial s}{\partial n} = -\frac{1}{s^3 \sqrt{r_s^2 + R^2}} \times \\ &\times \left\{ -\frac{1}{2} r_s^2 + r_s r \cos \mu - \frac{R^2}{2} - R \Delta z \right\} \approx \frac{R}{2s^3}. \end{aligned} \quad (5)$$

Плоская волна в физическом трехмерном пространстве описывается выражением

$$A(\mathbf{r}, t) = A_0 \exp(i(\omega t - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}))), \quad (6)$$

которое является решением волнового уравнения

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \Delta A = 0, \quad (7)$$

в чем можно убедиться непосредственной подстановкой формулы (6) в выражение (7).

Поле, падающее на параболоид, распространяется в отрицательную сторону оси  $Oz$ , тогда

$$A(\mathbf{r}, t) = A_0 \exp\left(-\frac{r^2}{a^2}\right) \cos(\omega t + kz). \quad (8)$$

где  $k = |\mathbf{k}|$ .

Такое поле представляет собой случай коллимированного гауссовского пучка. На параболоиде значения поля равны

$$A(\mathbf{r}, t) = A_0 \exp\left(-\frac{r_s^2}{a^2}\right) \cos(\omega t + kz_s).$$

### ЗАПИСЬ ВОЛНЫ, ОТРАЖЕННОЙ ОТ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ЗЕРКАЛА

Определим вектор  $\mathbf{k}'$  волны, отраженной от параболического зеркала. Этот вектор направлен вдоль линии  $BF$  (см. рис. 1), которая может быть повернута на полярный угол  $\mu$  относительно оси  $Oz$ :

$$k'_x = -k \sin 2\beta \cos \mu,$$

$$k'_y = -k \sin 2\beta \sin \mu, \quad k'_z = k \cos 2\beta.$$

Угол  $\beta$  равен углу падения луча на поверхность параболоида, поэтому отраженный луч будет составлять угол  $2\beta$  с осью  $Oz$ . Здесь

$$\sin 2\beta = \frac{2r_s}{R+2z_s}, \quad \cos 2\beta = \frac{R-2z_s}{R+2z_s}. \quad (9)$$

Скалярное произведение принимает вид

$$(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}) = k'_x x + k'_y y + k'_z z =$$

$$= -k \sin 2\beta \cos \mu x - k \sin 2\beta \sin \mu y + k \cos 2\beta z.$$

Подставляя выражение (2), получим

$$(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}) = -kr \sin 2\beta \cos^2 \mu - kr \sin 2\beta \sin^2 \mu + kz \cos 2\beta = -kr \sin 2\beta + kz \cos 2\beta.$$

Видим, что в случае нормального падения задача аксиально-симметричная. Окончательная запись отраженной волны принимает вид

$$A'(r, t) = A_0 \exp\left(-\left(\frac{r_s}{a}\right)^2\right) \times \cos\left[\omega t + k\left(\frac{2r_s}{R+2z_s}r - \frac{R-2z_s}{R+2z_s}z\right)\right]. \quad (10)$$

Вводим также обозначение

$$A''(r, t) = A_0 \exp\left(-\left(\frac{r_s}{a}\right)^2\right) \times \sin\left[\omega t + k\left(\frac{2r_s}{R+2z_s}r - \frac{R-2z_s}{R+2z_s}z\right)\right].$$

### ЗАПИСЬ ИНТЕГРАЛА КИРХГОФА

Векторный потенциал электромагнитного поля в вакууме подчиняется векторному волновому уравнению. Тогда согласно книге М. Борна и Э. Вольфа [16] имеет место следующая обобщенная теорема Кирхгофа, которая устанавливает связь решения волнового уравнения в произвольной точке пространства  $\mathbf{r}$  и в произвольный момент времени  $t$  со значениями решения и его производных на произвольной поверхности  $S$ , охватывающей указанную точку

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ \begin{aligned} & \mathbf{A}\left(r_s, t - \frac{s}{c}\right) \frac{\partial s^{-1}}{\partial n} - \\ & \frac{1}{cs} \frac{\partial s}{\partial n} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \left(r_s, t - \frac{s}{c}\right) - \\ & - \frac{1}{s} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial n} \left(r_s, t - \frac{s}{c}\right) \end{aligned} \right\} dS.$$

Компоненты электромагнитного поля полностью определяются векторным потенциалом как комбинации его производных. Ограничимся рассмотрением линейно поляризованного вдоль оси  $x$  векторного потенциала

$$\mathbf{A}_x(\mathbf{r}, t) = \mathbf{e}_x A(\mathbf{r}, t).$$

Скалярная функция  $A(\mathbf{r}, t)$  удовлетворяет интегралу Кирхгофа в виде

$$A(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ \begin{aligned} & A\left(r_s, t - \frac{s}{c}\right) \frac{\partial s^{-1}}{\partial n} - \\ & \frac{1}{cs} \frac{\partial s}{\partial n} \frac{\partial A}{\partial t} \left(r_s, t - \frac{s}{c}\right) - \\ & - \frac{1}{s} \frac{\partial A}{\partial n} \left(r_s, t - \frac{s}{c}\right) \end{aligned} \right\} dS. \quad (11)$$

Здесь  $s$  описывается формулой (3). Производная  $\partial/\partial n$  берется по нормали к поверхности  $S$  в точке  $r_s$ , тогда

$$\frac{\partial A}{\partial n} = \mathbf{n} \cdot \nabla A.$$

Формула (11) представляет собой интегральную запись строгого решения скалярного нестационарного волнового уравнения (7) и может быть конструктивно использована для исследования распределений векторного потенциала в фокусе оптической системы при фокусировке лазерных импульсов произвольной длительности.

Получим выражение для интеграла Кирхгофа для случая фокусировки плоской волны (8) параболическим зеркалом. Фокусируется отраженная волна (10). Вычислим производные, фигурирующие в интеграле Кирхгофа, и возьмем их значения на поверхности параболоида

$$\frac{\partial A'}{\partial t} = -\omega A'',$$

$$\left. \frac{\partial A'(r, t)}{\partial n} \right|_s = \frac{r_s}{\sqrt{r_s^2 + R^2}} \left[ \left( \frac{2r_s}{a^2} \right) A' + \frac{2kr_s}{R+2z_s} A'' \right] + \frac{kR}{\sqrt{r_s^2 + R^2}} \left( \frac{R-2z_s}{R+2z_s} \right) A''.$$

Производные  $\partial s^{-1}/\partial n$  и  $\partial s/\partial n$  вычисляются по формулам (4) и (5).

В результате довольно громоздких преобразований в пренебрежении малыми слагаемыми порядка  $(kR)^{-1} \approx 10^{-7}$  получим

$$\begin{aligned} A(\mathbf{r}, t) &= -\frac{kR}{2\pi} \iint_S \frac{A''\left(r, t - \frac{s}{c}\right)}{s\sqrt{r_s^2 + R^2}} dS = \\ &= -A_0 \frac{kR}{2\pi} \iint_S \frac{1}{s\sqrt{r_s^2 + R^2}} \exp\left(-\left(\frac{r_s}{a}\right)^2\right) \times \\ &\times \sin\left[\omega t + k\left(\frac{2r_s^2}{R+2z_s} - \frac{R-2z_s}{R+2z_s}z_s - s\right)\right] dS. \end{aligned}$$

В интеграле Кирхгофа в выражении для фазы стоит скалярное произведение  $(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r})|_s$ . Для упрощения вычислений целесообразно сдвинуть систему координат вдоль оси  $Oz$  на величину  $R/2$  ( $z = R/2 + \Delta z$ ) так, чтобы центр

системы координат находится в фокусе параболического зеркала. Изменение системы координат не влияет на результаты вычислений. В новой системе координат скалярное произведение будет равно  $(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r})|_s = ks_i$ , где  $s_i = R/2 + z_s$  — расстояние от точки отражения  $B$  до точки фокуса  $F$ .

С учетом преобразования сдвига системы координат интеграл Кирхгофа принимает вид

$$A(r, t) = -A_0 \frac{kR}{2\pi} \times \oint_s \frac{1}{s\sqrt{r_s^2 + R^2}} \exp\left(-\left(\frac{r_s}{a}\right)^2\right) \sin[\omega t + k(s_i - s)] dS. \quad (12)$$

Далее следует записать выражение для разности хода (квадратичными малыми слагаемыми пренебрегаем, так как  $r^2, \Delta z^2, r\Delta z \approx 10^{-8-10}$ )

$$s_i - s = r \sin 2\beta \cos \mu - \Delta z \cos 2\beta. \quad (13)$$

Подставляя выражение (13) в формулу (12), получаем

$$A(r, t) = -A_0 \frac{kR}{\pi} \times \int_0^\infty r_s dr_s \int_0^\pi d\mu \frac{1}{s_i \sqrt{r_s^2 + R^2}} \exp\left(-\left(\frac{r_s}{a}\right)^2\right) \times \sin[\omega t + k(r \sin 2\beta \cos \mu - \Delta z \cos 2\beta)]. \quad (14)$$

Интеграл Кирхгофа (14) описывает распределение векторного потенциала в фокальной области параболического зеркала с точностью до поляризационных поправок.

**РАСЧЕТ ИНТЕГРАЛА КИРХГОФА В ФОКАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ  $\Delta z = 0$**

Отделяем зависимость от времени  $\sin(\omega t + kr \sin 2\beta \cos \mu) = \sin(\omega t) \times \cos(kr \sin 2\beta \cos \mu) + \cos(\omega t) \sin(kr \sin 2\beta \cos \mu)$ .

Пользуемся обнулением интеграла и интегральной формулой для функции Бесселя

$$\int_0^\pi d\mu \sin(kr \sin 2\beta \cos \mu) = 0, \int_0^\pi d\mu \cos(kr \sin 2\beta \cos \mu) = \pi J_0(kr \sin 2\beta).$$

В результате интеграл Кирхгофа (14) сводится к однократному интегрированию, а после подстановки выражения (9) принимает такую форму:

$$A(r, t) = -A_0(kR) \sin(\omega t) \times \int_0^\infty r_s dr_s \frac{1}{s_i \sqrt{r_s^2 + R^2}} \exp\left(-\left(\frac{r_s}{a}\right)^2\right) J_0\left(kr \frac{2r_s}{R + 2z_s}\right). \quad (15)$$

В параксиальном приближении  $R \gg r_s, z_s$  интеграл вычисляется

$$A(r, t) = -A_0(kR) \sin(\omega t) \frac{a^2}{R^2} \exp\left(-\left(\frac{akr}{R}\right)^2\right).$$

Получаем гауссовскую функцию с экспоненциальной шириной распределения

$$\left(\frac{akr}{R}\right)^2 = 2, \quad r = \sqrt{2} \frac{R}{ak} = \lambda \frac{R}{\sqrt{2\pi a}}.$$

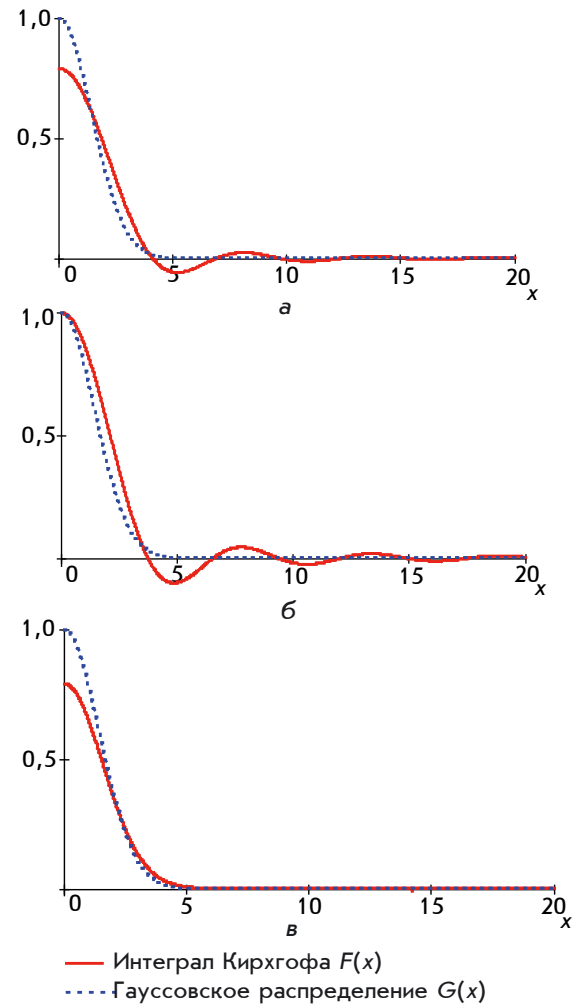
Расчеты интеграла (15), представленного в форме

$$F(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-q}}{(1+b_1q)^{1.5}} J_0\left(x \frac{\sqrt{q}}{(1+b_2q)}\right) dq,$$

$$b_1 = b_2 = \left(\frac{a}{R}\right)^2,$$

$$G(x) = \int_0^\infty e^{-q} J_0(x\sqrt{q}) dq = e^{-\frac{1}{4}x^2}.$$

отражены на рис. 2.



**Рис. 2. Расчеты интеграла Кирхгофа  $F(x)$ : а —  $b_1 = b_2 = 0,2$ ; б —  $b_1 = 0, b_2 = 0,2$ ; в —  $b_1 = 0,2, b_2 = 0$**

### РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВНЕ ФОКАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ

Распределение поля в плоскости наблюдения, сдвинутой по отношению к фокальной плоскости на величину  $\Delta z$ , также можно вычислить

$$A(r, t) = -A_0 k R \{ \sin(\omega t) I_1(r) - \cos(\omega t) I_2(r) \},$$

$$I_{1,2}(r) = \int_0^\infty r_s dr_s \frac{1}{s_f \sqrt{r_s^2 + R^2}} \exp\left(-\left(\frac{r_s}{a}\right)^2\right) \times \\ \times J_0(kr \sin 2\beta) \left(\frac{\cos}{\sin}\right) (k\Delta z \cos 2\beta).$$

В параксиальном приближении возникают упрощения

$$I_{1,2}(r) = \left(\frac{\cos}{\sin}\right) (k\Delta z) \times \\ \times \frac{2a^2}{R^2} \int_0^\infty p dp \exp(-p^2) J_0\left(\frac{2kar}{R} p\right). \quad (16)$$

Интеграл (16) вычисляется и дает гауссовскую функцию

$$I_{1,2}(r) = \left(\frac{\cos}{\sin}\right) (k\Delta z) \frac{a^2}{R^2} \exp\left(-\left(\frac{akr}{R}\right)^2\right).$$

Для векторного потенциала получаем

$$A(r, t) = -A_0 k R \frac{a^2}{R^2} \exp\left(-\left(\frac{akr}{R}\right)^2\right) \times \\ \times \{ \sin(\omega t) \cos(k\Delta z) - \cos(\omega t) \sin(k\Delta z) \} = \quad (17) \\ = -A_0 k R \frac{a^2}{R^2} \exp\left(-\left(\frac{akr}{R}\right)^2\right) \sin(\omega t - k\Delta z).$$

Формула (17) справедлива на небольших расстояниях от фокальной точки  $\Delta z < 100\lambda$ , поскольку она не учитывает расплывания поперечного распределения в зависимости от  $\Delta z$ .

Таким образом, при создании сверхвысоких интенсивностей излучения вплоть до значений  $3 \cdot 10^{20}$  Вт/см<sup>2</sup> и выше в экспериментах с фемтосекундными лазерами использовалось параболическое зеркало [12]. В этой связи представляет интерес изучение особенностей процесса фокусировки лазерного излучения таким зеркалом, поэтому в данной статье использовался подход, основанный на применении нестационарного обобщенного интеграла Кирхгофа в скалярной форме, а также рассмотрено осесимметричное параболическое зеркало, на которое падает коллимированный лазерный пучок с гауссовским поперечным распределением. В параксиальном приближении при нормальном падении лазерного излучения на зеркало решение волновой задачи в фокальной плоскости дает аксиально-симметричное гауссовское поперечное распределение для векторного потенциала и электрического поля. Это распределение сохраняется на небольших расстояниях от фокальной плоскости. При нарушении параксиального приближения для широкоапертурной системы возникают небольшие отклонения от гауссовского распределения, которые проявляются в уменьшении центрального максимума поля и в появлении периферийных колец для распределения поля.

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зигель Ф. Ю. Астрономы наблюдают / Ф. Ю. Зигель. — М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1977. — 194 с.
2. Сикорук Л. Л. Телескопы для любителей астрономии / Л. Л. Сикорук. — 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. — 368 с.
3. Вальд В. П. Зеркальные антенны для земных станций спутниковой связи / В. П. Вальд, О. П. Фролов. — М. : Горячая линия-Телеком, 2008. — 496 с.
4. Драбкин А. Л. Антенно-фидерные устройства / А. Л. Драбкин, В. Л. Зузенко, А. Г. Кислов. — 2-е изд., доп. и перераб. — М. : Сов. радио, 1974. — 536 с.
5. Корнблит С. СВЧ Оптика. Оптические принципы в применении к конструированию СВЧ антенн / С. Корнблит. — М. : Связь, 1980. — 360 с.
6. Лебедев И. В. Техника и приборы СВЧ : в 2 т. / И. В. Лебедев. — М. : Высш. шк., 1970. — Т. 1. — 417 с.
7. Фрадин А. З. Антенны сверхвысоких частот / А. З. Фрадин. — М. : Сов. радио, 1957. — 648 с.
8. Шубарин Ю. В. Антенны сверхвысоких частот / Ю. В. Шубарин. — Харьков : Изд-во Харьк. гос. ун-та, 1960. — 285 с.
9. Максотов Д. Д. Анаберрационные отражающие поверхности и системы и новые способы их испытания / Д. Д. Максотов. — Л. : Гос. техн.-теорет. изд-во, 1932. — 120 с. — (Труды Гос. опт. ин-та. Т. VIII, вып. 86).
10. Романова М. Ф. Исследование параболических зеркал методом Гартмана / М. Ф. Романова. — Л. : Гос. техн.-теорет. изд-во, 1927. — 80 с. — (Труды Гос. опт. ин-та. Т. IV, вып. 35).
11. Сверхсветовой источник направленного импульсного широкополостного электромагнитного излучения / В. М. Брендель, В. В. Букин, С. В. Гарнов [и др.] // Труды Института общей физики им. А. М. Прохорова Академии наук (ИОФАН). — 2014. — Т. 70. — С. 59–64.
12. Direct acceleration of electrons in a relativistic optical field: diagnostics of laser intensity / M. Kalashnikov, A. Andreev, A. Galkin, K. Ivanov, V. Korobkin, M. Romanovsky, O. Shiryayev // The Eighth International Conference on Inertial Fusion Sciences and Applications (IFSA-2013). Nara, Japan, September 8–13, 2013 (Oral presentation). — URL : <http://www.ile.osaka-u.ac.jp/ifsa13/common/data/abstractbook01.pdf>.

13. Вайс О. Е. К теории нелинейного томсоновского рассеяния остро сфокусированного лазерного импульса / О. Е. Вайс, С. Г. Бочкарев, В. Ю. Быченков // Краткие сообщения по физике Физического института им. П. Н. Лебедева Российской академии наук. — 2015. — Т. 42, № 12. — С. 62–67.
14. Electron vacuum acceleration by a tightly focused laser pulse / K. I. Popov, V. Yu. Bychenkov, W. Rozmus, R. D. Sydora // *Physics of Plasmas*. — 2008. — Vol. 15. — P. 013–108. — DOI : 10.1063/1.2830651.
15. Borovskii A. V. The structure of the laser field focusing by the parabolic mirror / A. V. Borovskii, A. L. Galkin // 14th International Workshop CSCPTIER, Moscow, April 2016. — Moscow : A. M. Prokhorov General Physics Institute RAS Coherent and Nonlinear Optics Department, 2016.
16. Борн М. Основы оптики / М. Борн, Э. Вольф. — М. : Наука, 1973. — 513 с.

#### REFERENCES

1. Zigel' F. Yu. *Astronomy nablyudayut* [Astronomers are watching]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 194 p.
2. Sikoruk L. L. *Teleskopy dlya lyubitelei astronomii* [Telescopes for stargazers]. 2<sup>nd</sup> ed. Moscow, Nauka Publ., 1989. 368 p.
3. Val'd V. P., Frolov O. P. *Zerkal' nye anteny dlya zemnykh stantsii sputnikovoi svyazi* [Mirror antennas for the Earth satellite stations]. Moscow, Goryachaya liniya-Telekom Publ., 2008. 496 p.
4. Drabkin A. L., Zuzenko V. L., Kislov A. G. *Antenno-fidernye ustroystva* [Antenna feeder systems]. 2<sup>nd</sup> ed. Moscow, Sovetskoe radio Publ., 1974. 536 p.
5. Kornblit S. *SVCh Optika. Opticheskie printsipy v primeneni k konstruirovaniyu SVCh antenn* [Microwave optics. Optical principles in constructing microwave antennas]. Moscow, Svyaz' Publ., 1980. 360 p.
6. Lebedev I. V. *Tekhnika i pribory SVCh* [Microwave equipment and devices]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1970. Vol. 1. 417 p.
7. Fradin A. Z. *Antenny sverkhvysokikh chastot* [Super high frequency antenna]. Moscow, Sovetskoe radio Publ., 1957. 648 p.
8. Shubarin Yu. V. *Antenny sverkhvysokikh chastot* [Super high frequency antenna]. Khar'kov State University Publ., 1960. 285 p.
9. Maksutov D. D. *Anaberratsionnye otrazhayushchie poverkhnosti i sistemy i novye sposoby ikh ispytaniy* [Aberration reflecting services and systems and new ways of their testing]. Proceedings of the S.I. Vavilov State Optical Institute, 1932, vol. VIII, iss. 86. 120 p.
10. Romanova M. F. *Issledovanie parabolicheskikh zerkal metodom Gartmana* [Investigation of parabolic mirrors by the Hartmann method]. Proceedings of the S.I. Vavilov State Optical Institute, 1927, vol. IV, iss. 35. 80 p.
11. Brendel' V. M., Bukin V. V., Garnov S. V. et al. Superluminal source of directional pulsed wideband electromagnetic radiation. *Trudy Instituta obshchei fiziki im. A. M. Prokhorova Akademii nauk (IOFAN) = Proceedings of the Prokhorov General Physics Institute, Russian Academy of Sciences*, 2014, vol. 70, pp. 59–64. (In Russian).
12. Kalashnikov M., Andreev A., Galkin A., Ivanov K., Korobkin V., Romanovsky M., Shiryayev O. Direct acceleration of electrons in a relativistic optical field: diagnostics of laser intensity. *The Eighth International Conference on Inertial Fusion Sciences and Applications (IFSA-2013). September 8–13, 2013, Nara, Japan* (Oral presentation). Available at: <http://www.ile.osaka-u.as.jp/ifsa13/common/data/abstractbook01.pdf>.
13. Vais O. E., Bochkarev S. G., Bychenkov V. Yu. On the non-linear Thomson scattering of the fine focused laser pulse. *Kratkie soobshcheniya po fizike Fizicheskogo instituta im. P.N. Lebedeva Rossiiskoi akademii nauk = Bulletin of the Lebedev Physics Institute*, 2015, vol. 42, no. 12, pp. 62–67. (In Russian).
14. Popov K. I., Bychenkov V. Yu., Rozmus W., Sydora R. D. Electron vacuum acceleration by a tightly focused laser pulse. *Physics of Plasmas*, 2008, vol. 15, pp. 013–108. DOI: 10.1063/1.2830651.
15. Borovskii A. V., Galkin A. L. The structure of the laser field focusing by the parabolic mirror. *14th International Workshop CSCPTIER, Moscow, Russia, April 2016*. Moscow, A. M. Prokhorov General Physics Institute RAS Coherent and Nonlinear Optics Department, 2016.
16. Born M., Vol'f. E. *Osnovy optiki* [Foundations of optics]. Moscow, Nauka Publ., 1973. 513 p.

#### Информация об авторах

Боровский Андрей Викторович — доктор физико-математических наук, профессор, кафедра информатики и кибернетики, Байкальский государственный университет, 664003, г. Иркутск, ул. Ленина, 11, e-mail: andrei-borovskii@mail.ru.

Галкин Андрей Леонидович — доктор физико-математических наук, заведующий сектором, Институт общей физики им. А. М. Прохорова Российской академии наук, 119991, г. Москва, ул. Вавилова, 38, e-mail: galkin@kapella.gpi.ru.

#### Библиографическое описание статьи

Боровский А. В. Математическая модель волновой фокусировки лазерного излучения параболическим зеркалом / А. В. Боровский, А. Л. Галкин // Известия Иркутской государственной экономической академии. — 2016. — Т. 26, № 4. — С. 652–658. — DOI : 10.17150/2500-2759.2016.26(4).652-658.

#### Authors

Andrei V. Borovskiy — Doctor habil. (Physical and Mathematical Sciences), Professor, Department of Informatics and Cybernetics, Baikal State University, 11 Lenin St., 664003, Irkutsk, Russian Federation, e-mail: andrei-borovskii@mail.ru.

Andrei L. Galkin — Doctor habil. (Physical and Mathematical Sciences), Professor, Divisional Director, Prokhorov General Physics Institute of the Russian Academy of Sciences, 38 Vavilova St., 119991, Moscow, Russian Federation, e-mail: galkin@kapella.gpi.ru.

#### Reference to article

Borovskiy A. V., Galkin A. L. Mathematical model of the laser radiation wave focusing by a parabolic mirror. *Izvestiya Irkutskoi gosudarstvennoi ekonomicheskoi akademii = Bulletin of Irkutsk State Economics Academy*, 2016, vol. 26, no 4, pp. 652–658. DOI: 10.17150/2500-2759.2016.26(4).652-658. (In Russian).